Экономико-математические методы и модели в управлении

Общие понятия

Модель – упрощённый образ оригинала. Под оригиналом понимается – объект, процесс, событие, явление и т.п. Построение и исследование моделей, то есть моделирование, облегчает изучение имеющихся в оригинале свойств и закономерностей. По способу отображения действительности различают три основных вида моделей — эвристические, натурные и математические. *Эвристические модели*, как правило, представляют собой образы, рисуемые в воображении человека. Их описание ведется словами естественного языка и, обычно, неоднозначно и субъективно. Эти модели неформализуемы.

Экономико-математические методы и модели в управлении

Натурные модели

Отличительной чертой этих моделей является их подобие реальным системам (они материальны), а отличие состоит в размерах, числе и материале элементов и т. п. Различают:

Физические модели. Это — реальные изделия, образцы, экспериментальные и натурные модели. Глобус – модель Земного шара.

Технические модели;

Социальные модели;

Экономические модели, например, Бизнес-модель;

и т. д.

Математические модели — формализуемые, то есть представляют собой совокупность взаимосвязанных математических и формально-логических выражений, как правило, отображающих реальные процессы и явления (физические, психические, социальные и т. д.).

ЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ ОПТИМИЗАЦИИ В УПРАВЛЕНИИ ЭКОНОМИКОЙ

Линейное программирование — область математики, разрабатывающая теорию и численные метода решения задач нахождения экстремума (максимума или минимума) линейной функции многих переменных при наличии линейных ограничений, т. е. линейных равенств или неравенств, связывающих эти переменные. С помощью задач линейного программирования решается широкий, круг вопросов планирования экономических процессов, где ставится цель поиска наилучшего (оптимального) решения.

Общая постановка задача линейного программирования (ЗЛП)

Найти вектор $\overline{\mathrm{X}} = (x_1, x_2, \ldots, \ldots x_n)$, максимизирующий линейную форму

$$f(\overline{\mathrm{X}}) = \sum_{j=1}^{n} C_j * X_j \rightarrow \max, \qquad j = 1, \ldots, n \quad (1.1)$$

и удовлетворяющую условиям

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} * X_j \leq b_i \qquad (1.2)$$

$$X_j \geq 0 \qquad (1.3)$$

Линейная функция $f(\overline{\mathrm{X}})$ называется целевой функцией задачи, условия (1.2) функциональными, а условия (1.3) — прямыми ограничениями задачи.

Вектор $\overline{\mathrm{X}} =$ (x_1 , x_2 , …,.. x_n) , компоненты которого удовлетворяют функциональным и прямым ограничениям задачи, будем называть планом или допустимым решением ЗЛП.

Допустимое решение, максимизирующие целевую функцию $f(\overline{\mathrm{X}})$, называют оптимальным планом задачи.

$$f(\overline{\mathrm{X}}^{*}) = max f(\overline{\mathrm{X}})$$

где $\overline{\mathrm{X}}^{*} = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ − оптимальное решение ЗЛП.

Будем считать, что ЗЛП записана в канонической форме, если ее целевая функция максимизируется, ограничения имеют вид равенств с неотрицательной правой частью и все переменные неотрицательны.

Задачи оптимизации производственной программы предприятия

времени, номенклатуру производственной продукции. Неизвестным в задаче являются объемы выпуска продукции каждого вида. Введем обозначения В качестве критериев оптимальности будем использовать: прибыль, себестоимость, затраты станочного :

$X_{j,s}$ — объем производства j-го продукта по s-му технологическому

способу (j= 1,2,..., n; s= 1,2…., Q_j);

n — количество видов выпускаемой продукции;

Q_j — число технологических способов, используемых при производстве j-го продукта;

b_i — наличие i-го ресурса (i = 1,2,..., m); m — количество типов используемых ресурсов;

$a_{i,j,s}$ — норма затрат i-го ресурса на производство единицы j-го продукта по s-му технологическому способу;

$p_{j,s}$ — прибыль от производства j-го продукта по s- му технологическому способу;

T_j — задания (госзаказ) по выпуску j-го вида продукции;

$C_{j,s}$ — себестоимость производства j-го продукта по s-му технологическому способу;

$P_{i,j}$ — заданный уровень прибыли.

Задача на максимум прибыли

Используя принятые выше обозначения, модель задачи можно записать в следующем виде

$$f(\overline{X}) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{s=1}^{Q_j} p_{j,s} * X_{j,s} \to max, \qquad j = 1, \dots, n;$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{s=1}^{Q_j} a_{i,j,s} * X_{j,s} \le b_i$$

$$X_{j,s} \ge 0, s = 1, \dots, Q_j$$

Экономико-математические методы и модели в управлении

Выражение $\mathbf{f}(\overline{\mathrm{X}})$ максимизирует совокупную прибыль всего объема выпускаемой продукции всех видов. В данной модели оптимизация возможна за счет включения в план выпуска наиболее выгодных видов продукции и за счет выбора дня каждого вида продукции наиболее выгодных способов ее производства. Способы производства отличаются друг от друга величиной удельной прибыли и нормами затрат ресурсов. Ограничения означают, что для любого из ресурсов его суммарный расход на производство всех видов продукции по всем способам не превосходит имеющихся ресурсов.

При составлении плана производства приходится учитывать не только ограниченность ресурсов, но и директивные задания (госзаказы) по выпуску продукции. При этом модель дополняется ограничением вида $\mathbf{X_j} > \mathbf{T_j}$,а свобода выбора значительно снижается.

Задача на минимум себестоимости производства

Используя принятые выше обозначения, модель задачи можно записать в следующем виде

$$f(\overline{X}) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{s=1}^{Q_j} c_{j,s} * X_{j,s} \to min;$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{s=1}^{Q_j} a_{i,j,s} * X_{j,s} \le b_i; \quad i = 1, \dots . m;$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{s=1}^{Q_j} p_{i,s} * X_{j,s} \ge P;$$

$$X_{j,s} \ge 0, \qquad s = 1, \dots, Q_j$$

Экономико-математические методы и модели в управлении

При построении модели на минимум затрат наличие ограничений типа «**больше**» или «**равно**» обязательно. Отсутствие ограничений снизу ведет к оптимальному плану с **нулевыми** значениями переменных, которые дадут наименьшее значение критерия оптимальности. Такое решение абсурдно с экономической точки зрения.

Все допустимые решения задачи, которой соответствует данная модель, различаются по видам затрат, но одинаковы с точки зрения результата. Результатом здесь выступает заданная производственная программа. Выбор наилучшего плана производства по минимуму затрат возможен вследствие эквивалентности результатов по всем вариантам. Следует подчеркнуть, что при различной величине результатов вариант с меньшими затратами может бьть и не лучшим: просто с меньшими затратами мы достигаем и меньшего результата.

Задача на максимум выпуска продукции в заданном ассортиментном соотношении (на максимум комплектов)

Введем новые обозначения k_j - количество изделий вида J, которые входят в некоторый комплект(например, комплект запасных частей для автомобиля). Функция максимума комплектной продукции будет следующая:

$$\max K = \min_{J} \{X_j / k_j\}, \quad j=1,\dots,n.$$

т. е. общее количество комплектов *K* определяется количеством из-делий, из которых можно сформировать меньше всего «порций» объемом k_j . Эти изделия определяют как бы «узкое место» в формировании комплектов, к максимальной «расшивке» которого следует стремиться.

Экономико-математические методы и модели в управлении

Введем новое ограничение *Xj/kj> К*, которое связывает количество комплектов *К* с условием по формированию комплектов. Модель в общем виде с учетом наличия нескольких способов производства продукции имеет вид:

$$K \rightarrow \max;$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{s=1}^{Q_j} a_{i,j,s} * X_{j,s} \le b_i$$

$$\sum_{s=1}^{Q_j} X_{j,s}/k_j \ge K, \qquad j=1,\dots,n;$$

$$X_{j,s} \ge 0, \qquad k_j \ge 0, \qquad s=1,\dots,Q_j$$

Задача на минимум затрат станочного времени при заданной производственной программе

Для решения данной задачи преобразуем основные ограничения по фонду времени работы оборудования j-й группы в уравнения путем ввода дополнительных неизвестных z_i , которые показывают резервный фонд времени i-й группы оборудования в плане загрузки станков. В результате система ограничений примет вид:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{s=1}^{Qj} a_{i,j,s} * X_{j,s} + z_i = b_i;$$

$$\sum_{s=1}^{Q_j} X_{j,s} \geq T_j, \qquad s=1,\ldots,Q_j;$$

$$X_{j,s} \geq 0, \quad z_i \geq 0, \quad j=1,\ldots,n.$$

Экономико-математические методы и модели в управлении

Общий расход полезного времени и его недоиспользование при заданном фонде времени работы оборудования каждой группы связаны взаимно однозначным соответствием: минимуму затрат станочного времени соответствует максимум свободного резерва и наоборот. В связи с этим целевая функция, обеспечивающая минимум станочного времени на выполнение заданной производственной программы, будет:

$$\sum_{i=1}^{m} z(i) \to max, \quad i=1,\ldots,m$$

Одним из направлений в математическом моделировании эконо- мических задач является использование свойств двойственной зада- чи, которая может быть сформулирована для любой задачи на оптимум. Хорошо разработанный математический аппарат линейного программирования позволяет не только получать с помощью эффективных вычислительных процедур оптимальный план, но также сделать ряд экономически содержательных выводов, основанных на свойствах задачи, двойственной к исходной задаче линейного программирования (ЗЛП).

Двойственная задача ЛП

Прямая задача

$f(\overline{X})=\sum_{j=1}^{n} C_j * X_j \rightarrow \max,$ (1)

$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} * X_j \lesseqgtr b(i),$ (2)

$X_j \geq 0$ (3)

Двойственная задача

$g(Y)=\sum_{i=1}^{m} b_i * Y_i \rightarrow \min,$ (4)

$\sum_{j=1}^{m} a_{i,j} * Y_j \geq C_j,$ (5)

$Y_i \geq 0$ (6)

Согласно теории линейного программирования каждой ЗЛП вида (1) — (3) соответствует двойственная ей ЗЛП: (4) — (6). Основные утверждения о взаимно двойственных задачах содержатся в двух следующих теоремах.

Экономико-математические методы и модели в управлении

Первая теорема двойственности

Для взаимно двойственных задач вида (1) — (3) и (4) — (6) возможен один из взаимоисключающих случаев:

1. В прямой и двойственной задачах имеются оптимальные решения, при этом значения целевых функций на оптимальных решениях совпадают:

$f(x)=g(y)$.

2. В прямой задаче допустимое множество не пусто, а целевая функция на этом множестве не ограничена сверху. При этом у двойственной задачи будет пустое допустимое множество.

3. В двойственной задаче допустимое множество не пусто, а целевая функция на этом множестве не ограничена снизу. При этом у прямой задачи допустимое множество оказывается пустым.

4.Обе рассматриваемые задачи имеют пустые допустимые множества.

Вторая теорема двойственности

Пусть $\overline{X} = (x_{1,}x_{2,\dots\dots,}x_n)$ — допустимое решение прямой задачи (1) — (3), а $\overline{Y} = (y_{1,}y_{2,\dots\dots,}y_m)$ — допустимое решение двойственной задачи (4) — (6). Для того чтобы они были оптимальными решениями соответственно задач (1) — (3) и (4) — (6), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие соотношения:

$$Y_i * (\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} * X_j - b_i) = 0; \quad (7)$$

.

$$X_j * (\sum_{i=1}^{m} a_{i,j} * Y_i - c_j) = 0; \quad (8)$$

Условия (7) и (8) позволяют, если известно решение одной из взаимно двойственных задач, найти оптимальное решение другой задачи.

ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦЯ ДВОЙСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ

Задача оптимального использования ресурсов.

Для составления плана выпуска четырех видов продукции P1, P2, P3, P4 на предприятии используют три вида сырья S1, S2, S3, S4. Объемы выделенного сырья, нормы расхода сырья и прибыль, полученная в результате выпуска каждого вида продукции приведены в таблице

Вид сырья	Запасы сырья	Вид продукции			
		P1	P2	P3	P4
S1	35	4	2	2	3
S2	30	1	1	2	3
S3	40	3	1	2	1
Прибыль		14	10	14	11

Составим экономико – математическую модель задачи оптимального использования ресурсов на максимум прибыли. В качестве неизвестных примем X_j – объем выпуска продукции j – го вида (j=1,2,3,4). Модель задачи:

$$f(\overline{X}) = 14X_1 + 10X_2 + 14X_3 + 11X_4 \to \max$$

Ограничения:

$$4X_1 + 2X_2 + 2X_3 + 3X_3 < 35$$

$$X_1 + X_2 + 2X_3 + 3X_3 < 30$$

$$3X_1 + X_2 + 2X_3 + X_3 < 40$$

$$X_j \geq 0, \quad j=1,2,3,4$$

Экономико-математические методы и модели в управлении

Сформулируем двойственную задачу.

Пусть некая организация решила закупить все ресурсы рассматриваемого предприятия. При этом необходимо установить оптимальную цену на приобретаемые ресурсы Y_1, Y_2, Y_3 исходя из двух условий: 1). **Покупающая организация старается минимизировать общую стоимость ресурсов;** 2). **За каждый вид ресурсов надо уплатить не менее той суммы, которую хозяйство может выручить при переработке сырья в готовую продукцию.**

Согласно первому условию общая стоимость сырья выразится величиной g(y)=35$Y_1 + 30Y_2 + 40Y_3 \rightarrow min$. Согласно второму требованию вводятся ограничения: на единицу первого вида продукции Р1 расходуются четыре единицы первого ресурса S1 ценой Y_1, одна единица второго ресурса ценой $У_2$ и три единицы третьего ресурса ценой $У_3$. Стоимость всех ресурсов, расходуемых на производство единицы первого вида продукции, равна $4Y_1 + Y_2 + 3Y_3$ и должна составлять не менее 14, т. е. $4Y_1 + Y_2 + 3Y_3 \geq 14$.

В результате аналогичных рассуждений относительно производства второго и третьего видов продукции система неравенств примет вид:

$$4Y_1 + Y_2 + 3Y_3 \geq 14$$
$$2Y_1 + Y_2 + Y_3 \geq 10$$
$$2Y_1 + 2Y_2 + 2Y_3 \geq 14$$
$$3Y_1 + 3Y_2 + 3Y_3 \geq 11$$

Цены ресурсов, естественно, должны быть неотрицательные: $Y_1 \geq 0, Y_2 \geq 0, Y_3 \geq 0$.

Получили симметричную пару взаимно двойственных задач: для производственной программы $\overline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ и при любом векторе оценок $\overline{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ выполняется неравенство *$f(\overline{X}) < g(\overline{Y})$*, т. е. ценность всей выпущенной продукции не превосходит суммарной оценки имеющихся ресурсов. Значит, величина *$f(\overline{X}) - g(\overline{Y})$*, характеризует производственные потери в зависимости от рассматриваемой производственной программы и выбранных оценок ресурсов.

Экономико-математические методы и модели в управлении

Управление запасами

Если некоторая организация имеет товарные запасы, то **капитал, овеществленный в этих товарах, замораживается.**

Этот капитал, который нельзя использовать, представляет для организации потерянную стоимость в форме невыплаченных процентов или неиспользуемых возможностей инвестирования. Кроме того, наличие запасов влечет за собой определенные издержки, поскольку для их хранения необходимо создать определенные условия и выделить определенные площади; «обходимо оплачивать работу персонала, осуществляющего управление запасами; запасы должны быть застрахованы и т.п. В этой связи разумно предположить, что целью любой организации является хранение по возможности наименьшего запаса. Однако, следует принять во внимание и другие соображения. Спрос на продукцию чаще всего содержит долю неопределенности. Поэтому чем меньше уровень запаса, тем больше вероятность того, что возникнет дефицит продукции.

Экономико-математические методы и модели в управлении

Наличие дефицита тех или иных товаров уже само по себе является для организации источником определенных убытков либо в сфере производства, либо в связи с потерей клиентов.

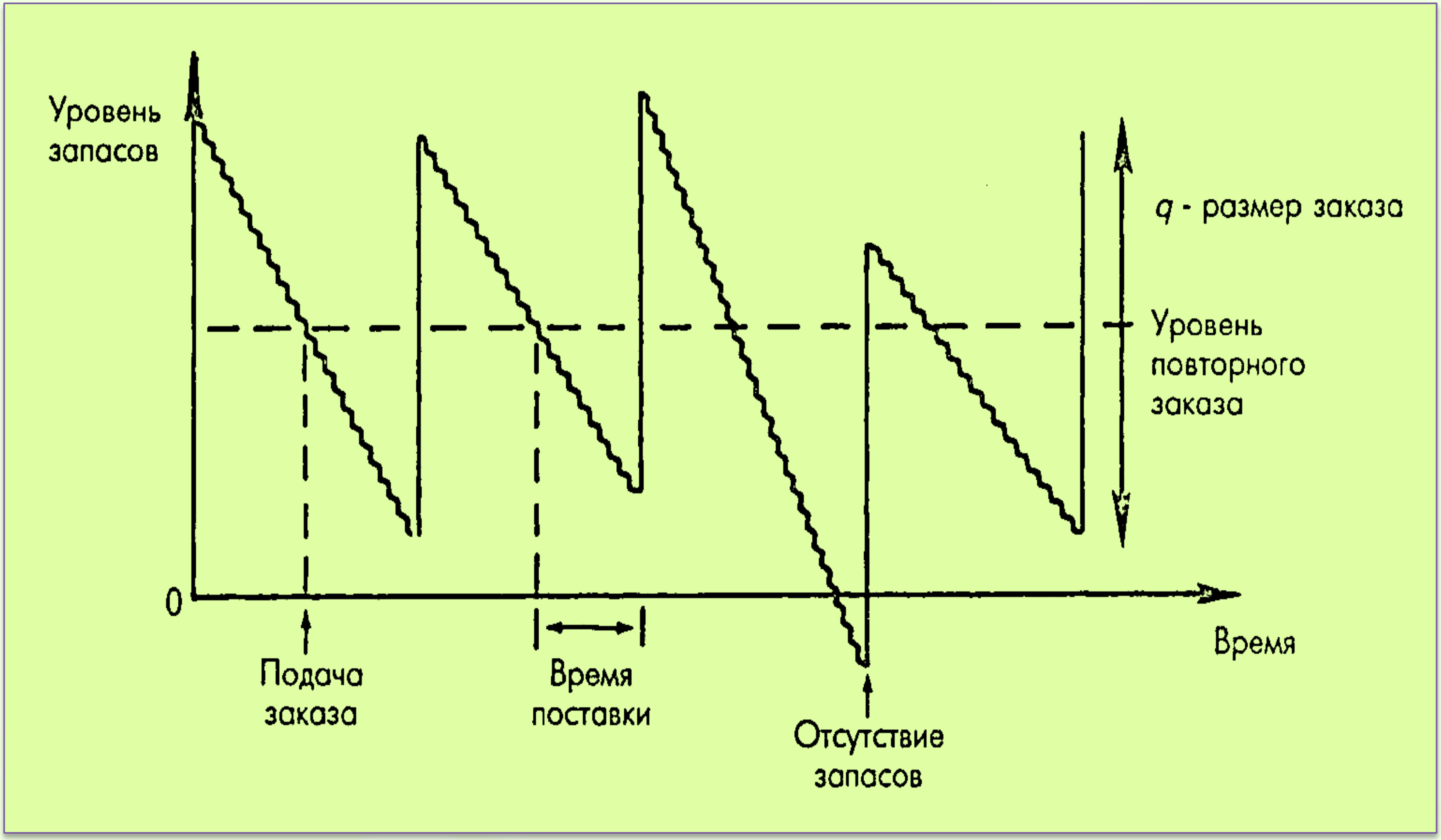
Если организация создает товарный запас исходя из размера производственной партии деталей, то вероятнее всего экономически выгодным окажется производство крупных партий деталей, однако, такая политика подразумевает высокий уровень исходного запаса. В данной области существует множество проблем, которые предстоит решить. Целью практически любого решения является **минимизация общих издержек, связанных с хранением запасов**. Не менее важен анализ последствий применения неоптимальной схемы запаса, что предполагает анализ модели на чувствительность.

Основная модель управления запасами

Рассмотрим проблемы управления запасами, связанные либо с заказом на партию деталей внешнему поставщику, либо с выпуском партии деталей. Политика организации производства или подачи заказов в этой ситуации должна быть такой, чтобы общие издержки были минимальными.

В любой системе управления запасами уровень последних изменяется в соответствии с циклической моделью. Процесс снижения уровня запасов определяется соответствующей моделью спроса. В некоторой точке для пополнения запаса будет сделан новый заказ. По прошествии некоторого времени, называемого временем поставки, заказ будет получен, и уровень запасов возрастает. После этого начинается новый цикл запасов

Экономико-математические методы и модели в управлении

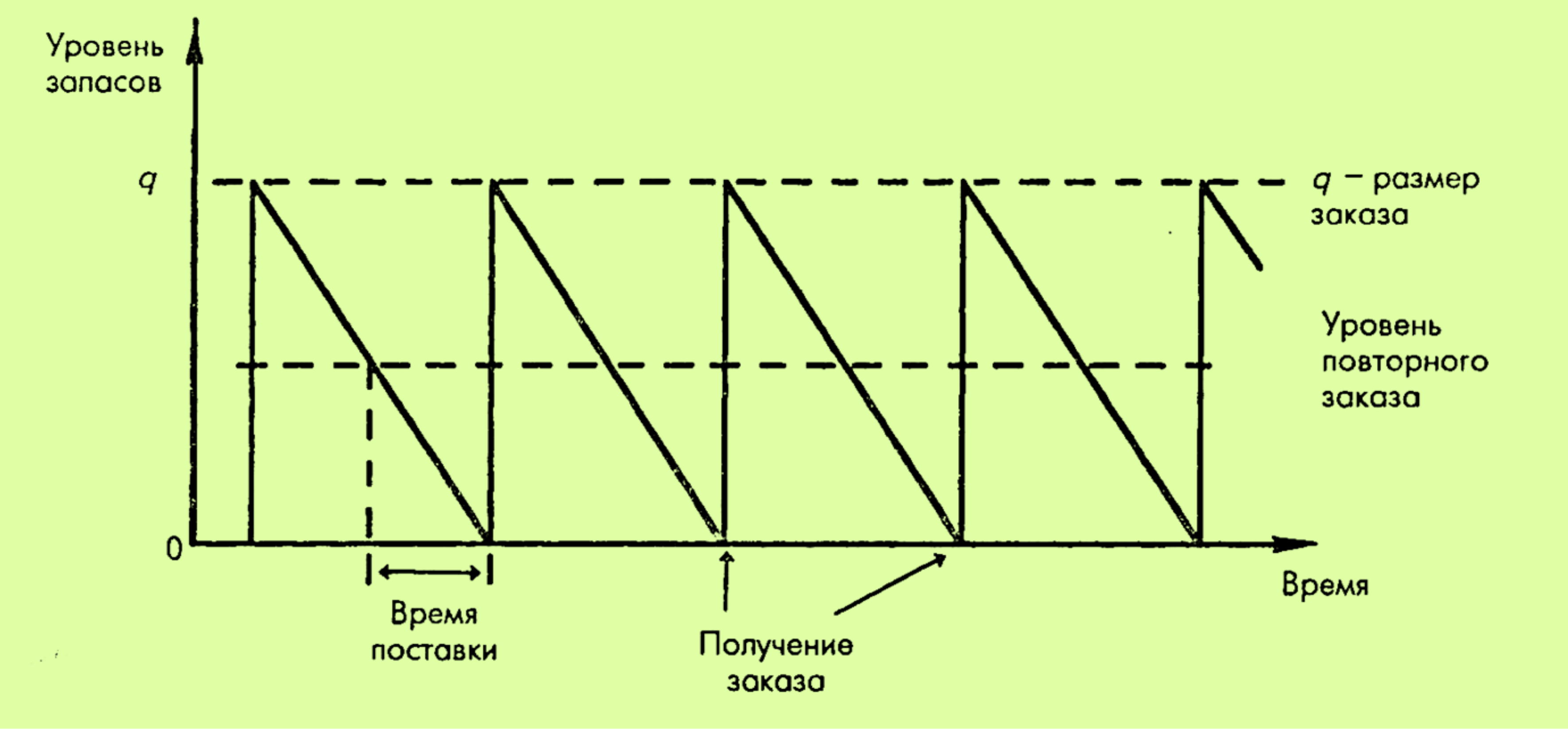


Ограничения модели управления запасами

1. Спрос на продукцию является постоянным, или приблизительно постоянным. Если коэффициент использования запасов является постоянным, то уровень запасов также будет уменьшаться с постоянным коэффициентом.
2. Предполагается, что время поставки известно и является постоянной величиной. Это означает, что заказ можно осуществлять в точке с определенными значениями временного параметра и размера запаса (уровень повторного заказа), которые обеспечивают получение заказа в тот момент, когда уровень запасов равен нулю.
3. Отсутствие запасов является недопустимым.
4. В течение каждого цикла запасов делается заказ на постоянное количество продукции (q).

Окончательный вид графика управления запасами является следующим:

Экономико-математические методы и модели в управлении



Все циклы запасов являются одинаковыми. Максимальное количество продукции, которая находится в запасе, совпадает с размером заказа q.

Экономико-математические методы и модели в управлении

Издержки хранения запасов

Если у внешнего поставщика заказывается партия продукции, процессы подачи и поставки заказа повлекут за собой определенного рода затраты. Необходимо создать соответствующие условия по хранению и управлению запасами. Поэтому в данной области также возникают определенные издержки. В отдельных случаях может возникнуть необходимость и в иных затратах, таких, например, как издержки вследствие нехватки запасов или хранения резервного запаса. Рассмотрим: понятия стоимости подачи заказа, издержек хранения, а также стоимости покупки продукции.

Если говорить о выпуске продукции в форме производственных партий, а не о покупке продукции извне, возникают аналогичные издержки. В данном случае ***стоимость подачи заказа*** эквивалентна стоимости организации технологического процесса по выпуску партии продукции, а ***стоимость покупки*** — издержкам производства продукции. Поэтому схема анализа останется неизменной. Каждый вид стоимости или издержек включает в себя постоянную и переменную компоненты. С точки зрения анализа основной модели управления запасами нас интересует только переменная ее часть. На этом этапе возникает необходимость введения в модель новой предпосылки: переменные издержки подачи заказа, или организации процесса выпуска партии продукции, известны, являются постоянными и не зависят от размера заказа.

Экономико-математические методы и модели в управлении

Уравнение общей стоимости

Необходимо построить модель, которая описывает издержки, связанные с наличием запасов, за весь период их хранения. Длительность этого периода значения не имеет: это может быть один день, месяц, год и т.д. В данном случае мы выберем период, равный одному году. Введем следующую систему обозначений:

D - ежегодный спрос на запас продукции;

C_0 - переменная стоимость подачи одного заказа, ден. ед(руб., долл., ф.ст. и т.д.)/ 1 заказ;

C_h, - переменная стоимость хранения единицы продукции в запасе, ден. ед(руб., долл., ф.ст. и т.д.)на единицу продукции в год;

C - цена покупки единицы продукции в запасе, ден. ед(руб., долл., ф.ст. и т.д.) в год;

q - объем заказа, единиц продукции/заказ.

Общая стоимость запасов в год = Общая стоимость подачи заказа в год +

+Общая стоимость хранения запасов в год.

Рассмотрим каждую из составляющих данного уравнения в отдельности.

ЕЖЕГОДНАЯ СТОИМОСТЬ ПОДАЧИ ЗАКАЗА

Если потребность в продукции составляет D единиц в год, а каждый заказ подается на партию в q единиц, тогда ежегодное количество заказов составит (D/q).

Ежегодная стоимость подачи заказов = Стоимость подачи одного заказа х Число заказов, подаваемых ежегодно = C_0 х (D/q) (ден. ед(руб., долл., ф.ст. и т.д.)).

ЕЖЕГОДНАЯ СТОИМОСТЬ ХРАНЕНИЯ ЗАПАСОВ

При расчете этой стоимости обычно исходят из среднего количества продукции, которая составляет запас в течение одного цикла. В простейшей ситуации, которую мы рассматриваем, уровень запасов изменяется линейно и принадлежит промежутку от q до нуля, следовательно, средний уровень запасов равен (q/2). В более сложных ситуациях для расчета среднего уровня запасов используются более сложные математические методы.

Стоимость хранения единицы продукции C_h определяется либо как фиксированная величина на весь год, либо как процент от общей стоимости единицы продукции за год. В различных организациях применяются самые разнообразные методы расчета издержек в этой сфере, однако в целом C_h, характеризует величину процентов с денежных ссуд, замороженных в форме запасов, стоимость повреждения или сохранности запасов, а также определенную часть общей стоимости системы хранения запасов.

Экономико-математические методы и модели в управлении

Ежегодная стоимость хранения запасов =
= Стоимость хранения единицы продукции в год х Средний размер запаса= C_h х (q/2) (ден. ед(руб., долл., ф.ст. и т.д.)).

Из этого следует, что общая стоимость запаса единицы продукции в год определяется следующим образом:

$TC = C_0 (D/q) + C_h (q/2)$ (ден. ед(руб., долл., ф.ст. и т.д.).

Данное уравнение называется уравнением общей стоимости основной модели управления запасами. Теперь мы должны определить значение q, при котором значение общей стоимости наименьшее.

Оптимальный размер заказа q_0

Для определения оптимального значения q используем операцию дифференцирования следующим образом:

$$TC = C_0\,(D/q) + C_h\,(q/2)$$

ТС принимает минимальное значение, когда

$$\frac{dTC}{dq} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d^2TC}{d\,q^2} > 0$$

$$\frac{dTC}{dq} = -C_0\frac{D}{q^2} + C_h\frac{1}{2}$$

и

$$\frac{d^2TC}{dq^2} = -2C_0\frac{D}{q^3} + 0 > 0, \text{если } q > 0$$

Положим

Экономико-математические методы и модели в управлении

$$\frac{dTC}{dq} = 0, \text{тогда} \quad -C_0\frac{D}{q^2} + \frac{1}{2}C_h = 0$$

Следовательно

$$C_0\frac{D}{q^2} = C_h\frac{1}{2}$$

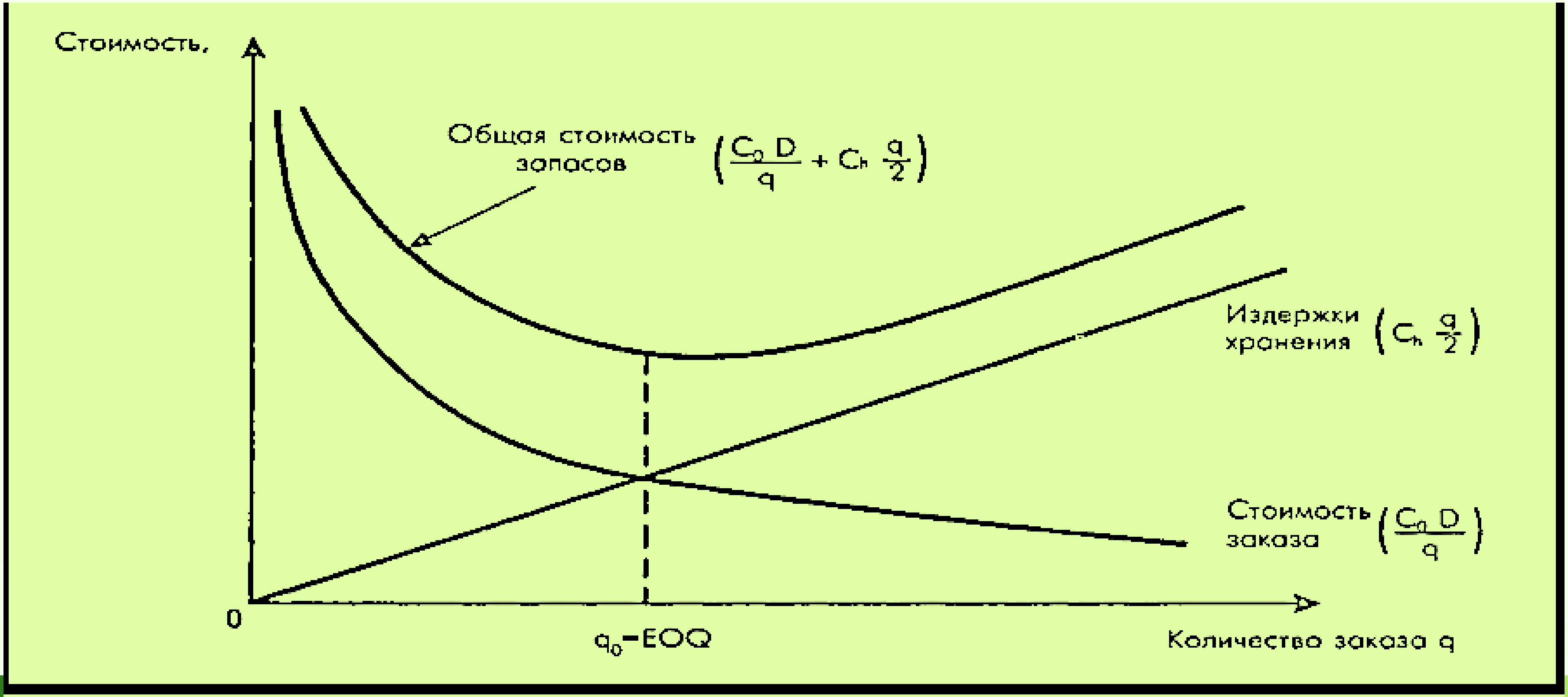
$$q^2 = \frac{2C_0D}{C_h} \qquad q_0 = \pm\sqrt{\frac{2C_0D}{C_h}}$$

Таким образом, TC принимает минимальное значение, если $q_0 = +\sqrt{\frac{2C_0D}{C_h}}$

Полученный объем заказа называют экономичным размером заказа (EOQ).Если в течение года с равными интервалами заказывать данное количество продукции, то стоимость хранения будет минимальной. В настоящее время стало уже традиционным непосредственное применение формулы модели EOQ, а не получение ее каждый раз из уравнения общей стоимости.

Экономико-математические методы и модели в управлении

Полезно воспользоваться графическим представлением уравнения общей стоимости и его компонент. Издержки хранения пропорциональны размеру заказа, следовательно, их график представляет собой прямую, проходящую через начало координат. Стоимость подачи заказа пропорциональна величине 1/q. Ниже приводится графическое изображение указанных видов издержек и их суммы



Экономико-математические методы и модели в управлении

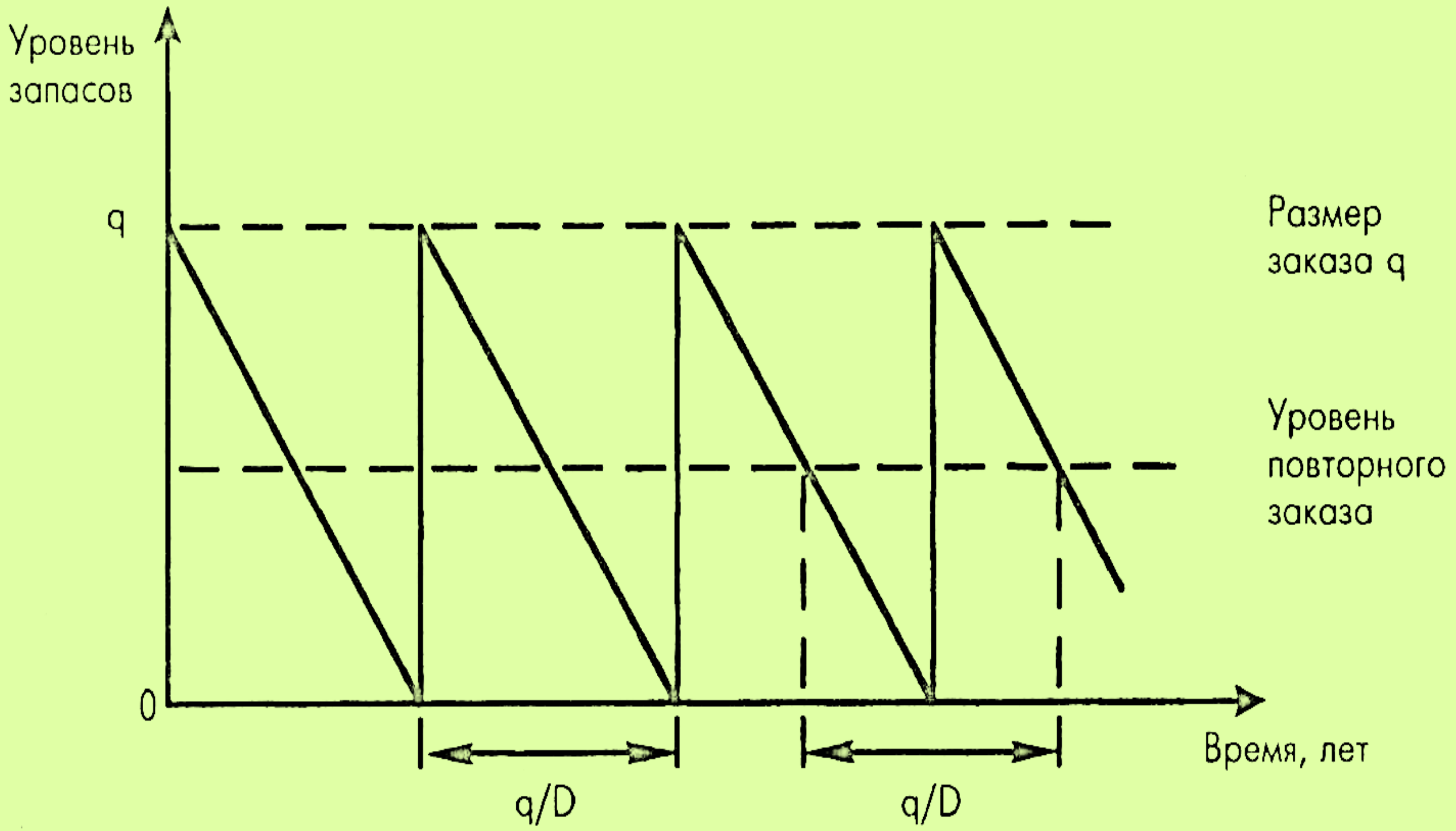
Нетрудно заметить, что если размер заказа невелик, то стоимость подачи заказа является доминирующей — в этом случае заказы подаются часто, но на небольшое количество продукции. Если размер заказа является достаточно большим, основной компонентой становится стоимость хранения — делается небольшое число заказов, размер которых достаточно велик. Экстремальная точка на графике уравнения общей стоимости соответствует ситуации, когда оба вида издержек равны друг другу. Этот факт может оказаться полезным при проверке расчетов EOQ. Кроме того, можно отметить, что в критической точке кривая общей стоимости заметно выравнивается. Это означает, что в данной области общая стоимость не обладает высокой чувствительностью по отношению к изменениям в размере заказа. После того как получено значение EOQ, остается еще, как правило, несколько значений, поэтому можно выбрать необходимый размер заказа, не приводящий к значительному увеличению общей его стоимости.

Уровень и интервал повторного заказа

Итак, мы знаем, каким должен быть размер заказа, но нам по-прежнему неизвестно, когда следует осуществлять его подачу.

Если время поставки заказа от поставщика составляет L недель, то в течение поставки будет использоваться L x (D/52) единиц продукции, составляющей запас, в предположении, что в году 52 недели. Поскольку величина спроса постоянна, количество продукции, которое используется в течение поставки заказа, является одновременно и уровнем повторного заказа. Таким образом, новый заказ следует подавать, когда уровень запасов снижается до величины L x (D/52). В этом случае новый заказ будет получен в тот момент, когда уровень запасов станет равным нулю.

Экономико-математические методы и модели в управлении



Экономико-математические методы и модели в управлении

В течение года потребуется D/q заказов с равными интервалами, следовательно, новый цикл заказа всегда начинается в точке

$$\frac{\mathbf{1}\ \text{год}}{\left({}^{D}/_{q}\right)\text{заказов}} = \frac{q}{D} \quad \text{лет}$$

Так как все циклы заказов одинаковы, интервал повторного заказа также будет равен (q/D) лет.

ЗАДАЧА. Объем продажи магазина составляет 500 упаковок каши в год. Величина спроса равномерно распределяется в течение года. Цена покупки одного пакета равна 2 ден. ед. За один заказ владелец магазина должен заплатить 10 ден. ед. Время доставки заказа от поставщика составляет 12 рабочих дней (при 6-дневной рабочей неделе). По оценкам специалистов, издержки хранения составляют 20% среднегодовой стоимости запасов. Сколько пакетов должен заказывать владелец магазина каждый раз, если его цель состоит в минимизации общей стоимости запасов? Предположим, что магазин работает 300 дней в году, определим, с какой частотой следует осуществлять подачу заказов и уровень повторного заказа.

Экономико-математические методы и модели в управлении

Экономичный размер заказа равен:

$q_0 = +\sqrt{\frac{2C_0D}{C_h}}$ **где D= 500 пакетов в год;** $C_0 = \mathbf{10}$ ден. ед. за один заказ;

$C_0 =$ **20% в год от стоимости запаса размером в одну упаковку, или 0,2x2 ден. ед. в год за одну упаковку. Следовательно** q_0 **=158,11. Количество заказываемых пакетов должно быть целым числом, поэтому в качестве EOQ выберем значение, равное 158 пакетам. В дальнейшем мы можем попытаться определить размер заказа более точно. Минимальное значение общей стоимости заказа в год определяется по следующей формуле:**

$$TC = C_0\,(D/q) + C_h\,(q/2).$$

Следовательно,

TC = 10 x 500/158 + 0,2 x 2 x 158/2 = 31,6 + 31,6 = 63,2 ден.ед. в год.

Общая стоимость купленных владельцем магазина 500 упаковок каши в год составляет: Стоимость запасов + Стоимость покупки =

= 63,2 ден.ед.+ 2 ден.ед. x 500 = 1063,2 ден.ед. в год.

Таким образом, стоимость запасов составляет 6% общей стоимости покупки в год. Если бы владелец магазина подавал заказы на партии в 150 упаковок, то величина общей стоимости запасов за год составила бы:

TC_{150} = 10 x 500/150 + 0,2 x 2 x 150/2 = 33,33 + 30,0 = 63,33 ден.ед. в год.

По сравнению со стоимостью, соответствующей найденному значению EOQ, данное увеличение стоимости является небольшим и составляет 0,13 ден.ед. в год.

Подачу нового заказа владелец магазина должен осуществлять каждый раз по истечении периода, равного 158/500 лет. Поскольку в году 300 рабочих дней, интервал повторного заказа будет равен

$$\frac{158 \text{x} 300}{500} = 94,8$$

Объем продажи пакетов каши за 12 дней поставки заказа составит: (Спрос/Число дней) x Время поставки = (500/300) x 12 = 20 упаковок.

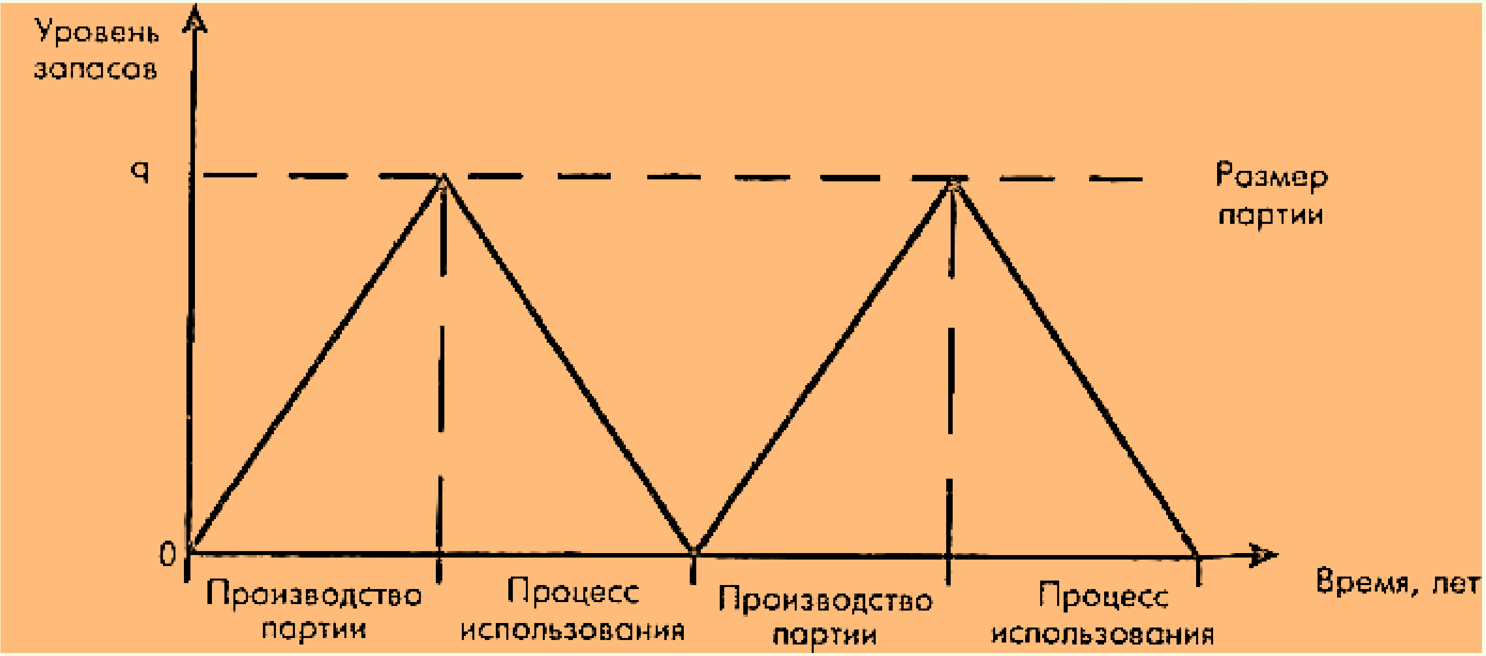
Следовательно, уровень повторного заказа равен 20 упаковкам. Таким образом, подача нового заказа производится в тот момент, когда уровень запасов равен 20 пакетам.

Модель экономичного размера партии

Организации, специализирующиеся на выпуске различных видов товаров, могут организовать технологический процесс не на непрерывной основе, а на основе производства партий продукции. Например, на лесопромышленном предприятии может быть принято решение о производстве партии (большого) бруса 200х200 из сосны, затем — партии (маленького) бруса 100х100, за которой должна следовать партия бруса 50х50. Если в организации используется производство продукции партиями, то приходится решать вопрос о размере партии продукции, производимой в течение одного производственного цикла, и о том, с какой частотой следует производить партию определенной продукции. Возникающие трудности аналогичны проблемам, связанным с определением экономичного размера заказа. Вместо заказа определенного количества продукции у внешнего поставщика рассматривается объем производства определенной продукции. Таким образом, стоимости заказа, которая фигурировала в изложенной выше модели, соответствует стоимость организации процесса производства партии продукции.

Экономико-математические методы и модели в управлении

В графическом виде модель можно представить следующим образом:



Общая ежегодная стоимость производства =
=Ежегодная стоимость организации технологического процесса +
+ Годовая сумма издержек хранения.

Экономико-математические методы и модели в управлении

Если через C_s обозначить стоимость организации каждого производственного цикла, то тогда

$$TC = C_s \times (D/q) + C_h \times (q/2) \text{ (ден.ед. в год)},$$

где q — размер партии продукции. Очевидно, что по аналогии с предыдущей задачей ТС принимает свое минимальное значение, если

$$q_0 = \sqrt{2CsD/Ch}$$

Полученное оптимальное количество продукции в партии называют экономичным размером партии (EBQ).

Экономико-математические методы и модели в управлении

Организация, производящая изделия из керамики, выпускает несколько видов кофейников. Производственный процесс организован по принципу выпуска партий кофейников общим объемом 500 штук в неделю. Спрос на наиболее популярную модель, которую мы обозначим через X, составляет 2500 изделий в год и равномерно распределяется в течение года. Вне зависимости от того, в какой момент времени возникает необходимость в производстве партии кофейников модели X, стоимость производственного процесса составляет 200 руб. По оценкам специалистов организации стоимость хранения кофейников составляет 1,50 руб. за единицу.

Какова должна быть партия кофейников, чтобы затраты на производство и хранение были минимальными? Как часто следует возобновлять производственный цикл и какова его длительность? Предполагается, что в году 50 рабочих недель.

Экономико-математические методы и модели в управлении

Обозначим:

D_s = 2500 кофейников в год; C_q = 200 руб. на один производственный цикл;

C_h= 1,50 руб. за один кофейник в год.

Экономичный размер партии можно определить следующим образом:

$$q_0 = \sqrt{2CSD/Ch} = \sqrt{2 \times 200 \times 2500/1{,}50} = 816{,}5.$$

Поскольку кривая общей стоимости не обладает высокой чувствительностью по отношению к небольшим изменениям значений q, вполне вероятно, что выбранное в качестве EBQ значение, равное 820, не приведет к значительному увеличению общей стоимости. Это утверждение можно легко проверить.

Для q = 816,5 единиц имеем:

TC = 200 х 2500/816,5 + 1,5 х 816,5/2 = 612,37 + 612,37 = 1224,74 руб. в год.

Для q = 820 единиц имеем:

TC = 200 х 2500/820 + 1,5 х 820/2 = 609,76 + 615 = 1224,76 руб. в год.

Для q = 800 единиц имеем: TC = 200 х 2500/800 + 1,5 х 800/2 = 625 + 600 = 1225 руб. в год.

Экономико-математические методы и модели в управлении

Наиболее удобный размер партии, равный 800 кофейникам, по сравнению с оптимальным размером приводит к увеличению общей стоимости производства и хранения кофейников на 26 коп.

Примем в качестве EBQ значение, равное 800 кофейникам. Число производственных циклов в год составит: 2500/800 = 3,125 (т.е. 25 циклов за каждые 8 лет), следовательно, интервал между двумя любыми производственными циклами равен: 800 x 50/2500 = 16 недель.

Если объем производства в неделю равен 500 кофейникам, то процесс производства одной партии займет 800/500 = 1,6 недели.

Задача о раскрое

Проблема оптимального раскроя возникает во многих производствах. В машиностроении, деревообработке, швейном производстве возникает необходимость раскроя материала. Простейшие задачи раскроя связаны с порезкой линейного материала (прутки), более сложная математическая задача имеет место при раскрое листового и объемного материала.

Из материала определенного размера необходимо выкроить m видов деталей i-го вида в количестве b_i штук. Эти детали могут выкраиваться n способами. При j-м варианте раскроя единицы материала выкраивается $a_{i,j}$ деталей i-го вида, а стоимость отходов при данном способе раскроя равна c_j.

Задача состоит в том, чтобы путем наиболее рационального раскроя имеющихся материалов свести эти отходы до минимума.

Обозначим через x_j количество единиц материала, раскраиваемых j-м способом. Экономико-математическая модель задачи:

$$\min L = \sum_{j=1}^{n} c_j * x_j;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} * x_j \geq b_i; \quad i=1,..,m;$$

$$x_j \geq 0; \quad j=1,..n;$$

ПРИМЕР 1. Раскрой одномерного материала

Фирма получает от поставщиков прутки стального проката длиной 600 см. Согласно заявкам потребителей требуются заготовки трех видов в количестве: 150 тыс. шт. длиной 250 см., 140 тыс. шт. длиной 190 см., 48 тыс. шт. длиной 100 см.

Возможные варианты раскроя показаны в таблице 1.

Необходимо так разрезать прутки, чтобы обеспечить минимум отходов.

Экономико-математические методы и модели в управлении

Таблица 1.

Вариант	Количество заготовок длиной			Отходы, см.
	250 см.	190 см.	100 см.	
1	2	-	1	-
2	1	1	1	60
3	-	3	-	30
4	-	2	2	20
5	-	1	4	10
6	-	-	6	-

Это задача целочисленного программирования. Обозначим через x_j — количество прутков, раскраиваемых по j-му варианту. Экономико-математическая модель задачи:

$$\min L = 60x_2 + 30x_3 + 20x_4 + 10x_5$$

$$2x_1 + x_2 = 150\,000;$$

$$x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 140\,000;$$

$$x_1 + x_2 + 2x_4 + 4x_5 + 6x_6 = 48\,000;$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0.$$

ПРИМЕР 2. **Раскрой листового материала.**

Фирма получила от поставщиков 100 листов фанеры размером 2,5 х 1,5 м, которую нужно раскроить на прямоугольные заготовки А, Б, В размерами: А — 2 х 1 м, Б — 1 х 0,75 м, В — 0,5 х 0,5 м, в ассортименте 1:4:12.

Возможные варианты раскроя представлены на рис. 1.

Необходимо разработать оптимальный план раскроя фанеры, таблица 2.

УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЛЕСОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
УГЛТУ

Экономико-математические методы и модели в управлении

Рис. 1.

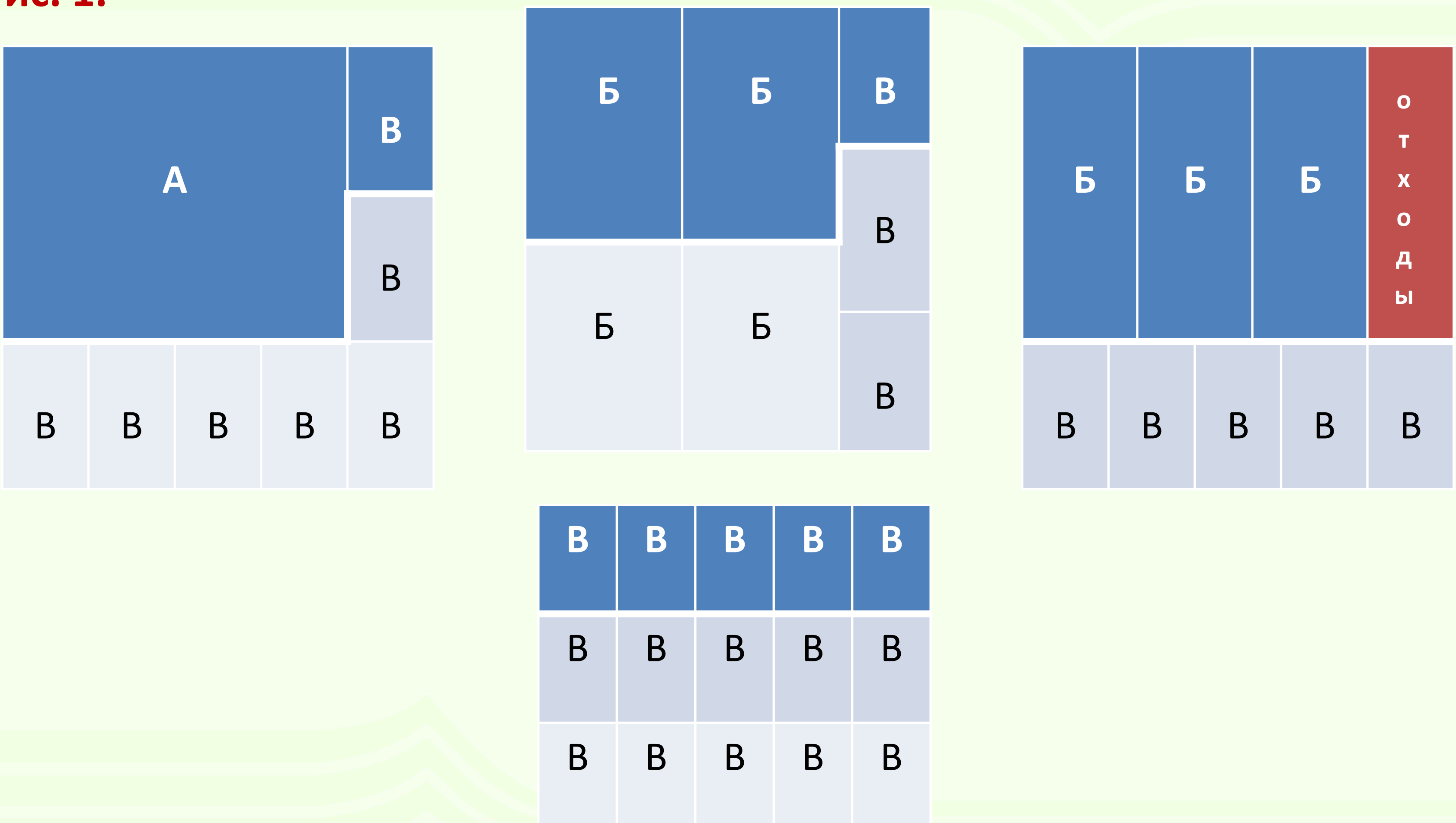


Таблица 2. Всевозможные варианты раскроя

Вариант	Количество заготовок			Отходы, м
	А	Б	В	
1	1	0	7	0
2	0	4	3	0
3	0	3	5	0,5
4	0	0	15	0

Это задача целочисленного программирования. Обозначим через x_j — количество листов, раскраиваемых по j-му варианту. Соотношение заготовок в ассортименте 1:4:12, следовательно, должно выполняться равенство:

$$\frac{x_1}{1} = \frac{4x_2 + 3x_3}{4} = \frac{7x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 15x_4}{12}$$

Экономико – математическая модель задачи:

$$\min L = 0{,}5x_3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100;$$

$$4x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 0;$$

$$5x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 15x_4 = 0;$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

Оптимальное решение задачи: $\bar{X}$= (47, 47, 0, 6), т. е. для сокращения отходов нужно раскроить первым способом 47 листов, вторым — 37, четвертым — 6.

Задача о ранце

Задача о ранде — задача о загрузке ограниченного объема — возникает при загрузке самолета, грузового автомобиля, термической печи, контейнера.

Пусть имеется некоторый объем V, который необходимо заполнить различными предметами. Предметов имеется несколько видов, отличающихся объемом v_i и ценностью c_i.

Требуется определить вариант заполнения предметами объема V, чтобы их суммарная ценность оказалась наибольшей. Неизвестные переменные задачи это x_i — число предметов i- го вида выбранных для размещения в ранце. Экономико-математическая модель задачи:

$$\max L = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} v_i x_i \le V$$

$$x_i \ge 0$$

Экономико-математические методы и модели в управлении

ПРИМЕР.

В автомобиль грузоподъемностью 3000 кг требуется загрузить четыре вида предметов массой 2, 5, 7, 10 кг и стоимостью 12, 15, 14, 20 руб./шт. так, чтобы их суммарная стоимость была максимальной. При этом нужно загрузить не менее 100 штук предметов первого вида, 50 штук — второго вида, 40 штук — третьего вида, 20 штук — четвертого вида.

Обозначим x_i — число предметов i-го вида, загружаемое в автомобиль.

Экономико-математическая модель:

$$\max L = 12x_1 + 15x_2 + 14x_3 + 20x_4$$

$$2x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 10x_4 \le 3000$$

$$x_1 \ge 100; \quad x_2 \ge 50; \quad x_3 \ge 40; \quad x_4 \ge 20$$

Решение: $\overline{X} = (1135, 50, 40, 20)$; max L = 15330 руб.

Экономико-математический анализ полученных оптимальных решений

Экономико-математический анализ – важный этап моделирования экономических и управленческих задач. Любая модель лишь упрощенно, огрублено отображает реальный экономический процесс, и это упрощение существенно сказывается на исходной информации, так и на получаемых результатах. В связи с этим невозможно рассматривать процесс выработки решений с помощью математических моделей, как одноразовое аналитическое действие. Экономико-математический анализ решений осуществляется в двух основных направлениях: вариантные расчеты по моделям с сопоставлением различных вариантов плана; анализ каждого из полученных решений с помощью двойственных оценок.

Экономико-математические методы и модели в управлении

Вариантные расчеты могут осуществляться при постоянной структуре самой модели (постоянном составе неизвестных, способов производства, ограничений задачи и одинаковом критерии оптимизации), но с изменением величины конкретных показателей модели или при варьировании элементов самой модели: изменении критерия оптимизации, добавлении новых ограничений на ресурсы или на способы производства, расширении множества вариантов и т. д.

Одно из эффективных средств экономико-математического анализа — объективно обусловленные оценки оптимального плана. Такого рода анализ базируется на свойствах двойственных оценок. Мы установили общие математические свойства двойственных оценок для задач на оптимум любой экономической природы. Однако экономическая интерпретация этих оценок может быть совершенно различной для разных задач.

Экономико-математические методы и модели в управлении

Перейдем к рассмотрению конкретных экономических свойств оценок Y_i оптимального плана. Сначала перечислим их:

Свойство 1. Оценки как мера дефицитности ресурсов.

Свойство 2. Оценки как мера влияния ограничений на функционал.

Свойство 3. Оценки — инструмент определения эффективности отдельных вариантов.

Свойство 4. Оценки — инструмент балансирования суммарных затрат и результатов.

Далее проиллюстрируем эти свойства, рассматривая конкретный пример: на основании информации, приведенной в таблице 1, составить план производства, максимизирующий объем прибыли.

Экономико-математические методы и модели в управлении

Таблица 1.

РЕСУРСЫ	Затраты ресурсов на единицу продукции		Наличие ресурсов
	А	Б	
Труд	2	4	2000
Сырье	4	1	1400
Оборудование	2	1	800
Прибыль на единицу продукции	40	60	

В результате решения задачи получим следующие выражения:

Прямая задача ЛП:

$\overline{X}$ = (200,400),

f($\overline{X}$) = $40X_1 + 60X_2 =$ 40*200 + 60*400 = 32 000.

Двойственная задача:

$\overline{Y}$ = ($\frac{40}{3}, 0, \frac{20}{3}$),

g($\overline{Y}$) $= 2000Y_1 + 1400Y_2 + 800Y_3 = 2000\frac{40}{3} + 800\frac{20}{3}$=32000

Экономико-математические методы и модели в управлении

Свойство 1. Оценки как мера дефицитности ресурсов.

Объективно обусловленные оценки выражают степень дефицитности, ограниченности факторов производства по отношению к потребностям, заданным целевой функцией. Количественно степень дефицитности находит выражение в предельных оценках эффективности факторов производства, эффективности с точки зрения их вклада в целевую функцию. Все факторы, не лимитирующие, не ограничивающие производство, получат нулевые оценки. В нашем примере: объективно обусловленные оценки труда (Y_1) равны 40/3; оборудования (Y_3) — 20/3; сырья (Y_2) = 0; Это свойство вытекает из второй теоремы двойственности:

$$\text{если } Y_i > 0, \quad \text{то } \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}X_j = b_i;$$

$$\text{если } \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}X_j < b_i, \quad \text{то } Y_i = 0,\ i=1,\dots,m.$$

Экономико-математические методы и модели в управлении

Дефицитный ресурс, полностью используемый в оптимальном ппане ($\sum a_{i,j}X_i = b_i$), имеет положительную оценку Y_i > 0; не дефицитный, не полностью используемый ресурс (для которого$\sum\ a_{i,j}Y_j < b_i$) имеет нулевую оценку Y_i = 0.

В нашем примере сырье не является дефицитным ресурсом:

$$4X_1 + X_2 \le 1400,$$

$$4*200+400 = 1200 < 1400 = b_2$$

$$Y_2 = 0$$

тогда как ресурсы «труд» и «оборудование» используются полностью. Труд: $2X_1 + 4X_2 < 2000$,

$$2*200+4*400=2000 = b_1, \qquad Y_1 = 40/3$$

Оборудование:

$$2X_i + X_2 \leq 800,$$

$$2*200+400=800=b_3, \quad Y_3 = \frac{20}{3}.$$

Чем выше величина оценки Y_i, тем острее дефицитность i-го ресурса.

В нашем примере труд более «дефицитен», чем оборудование: 40/3 > 20/3.

Свойство 2. Оценки как мера влияния ограничений на функционал.

Величина объективно обусловленной оценки того или иного ресурса показывает, насколько возросло бы максимальное значение целевой функции, если бы объем данного ресурса увеличился на одну единицу. (На основании теоремы об оценках $\Delta f(\overline{X}) = Y_i \Delta b_i$). Так, в нашем примере увеличение фонда времени работы оборудования на 1 мин. (Δb_3 = 1) привело бы к росту максимальной суммы прибыли на 6,6 единиц ($\Delta f(\overline{X}) = Y_3 \Delta b_3$ =20/3*1=6,6).

В связи с этим понятна и нулевая оценка, полученная для сырья: поскольку сырье используется не полностью, то увеличение его запасов не повлияет на оптимальный план выпуска продукции и сумму его прибыли.

Однако, необходимо иметь в виду, что оценки позволяют судить об эффекте не любых, а лишь сравнительно небольших изменений объема ресурсов. При резких изменениях сами оценки могут стать другими.

Значение свойства 2 состоит в том, что оно позволяет выявить направления мероприятий по устранению «узких» мест, обеспечивающие наибольший экономический эффект, а также целесообразные изменения в структуре выпуска продукции с позиций общего оптимума.

Благодарю за внимание!